Geometrie als Transportmittel naturwissenschaftlicher Inhalte

Zusammenfassung des Vortrages bei der Lehrerfortbildungstagung vom 21.4.2006 in Wien
Prof. Georg Fuchs; BRG 4 Waltergasse 7

In diesem Vortrag geht es um Inhalte, die in ihrem wesentlichen Kern Geometrie oder geometrische Zusammenhänge enthalten. Der Großteil, wie auch die gezeigten Bilder, entstammt dem Alltag. Viele der betrachteten Phänomene lassen auf den ersten Blick nicht vermuten, dass ihnen dieselbe geometrische Idee innewohnt. Ein wesentliches Anliegen ist es auch, zu vermitteln wie schön es ist, mit offenen „geometrischen" Augen durchs Leben zu gehen.

Der Vortrag gliedert sich in mehrere Einheiten, in denen geometrisch verwandte Beispiele zusammengefasst sind. Innerhalb dieser Beispielgruppen wird auf die tragenden geometrischen Ideen eingegangen. Durch eine derartige Herangehensweise eröffnet die Geometrie zahlreiche Zugänge zu teilweise sehr komplizierten naturwissenschaftlichen Sachverhalten.

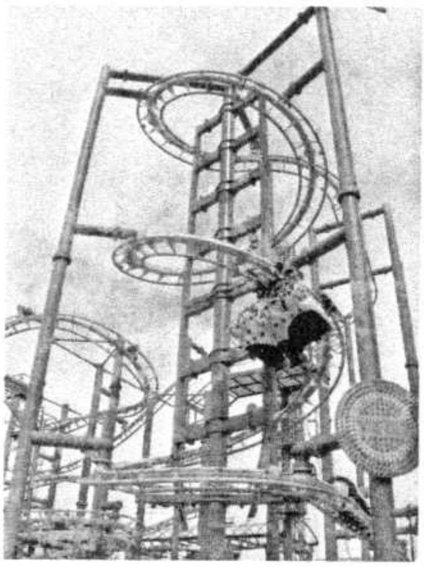
Angesichts der neuen technischen Möglichkeiten können heute viele Dinge in den Schulunterricht sinnvoll hinein genommen werden, deren Komplexität dies noch vor wenigen Jahrzehnten unmöglich gemacht hätte.

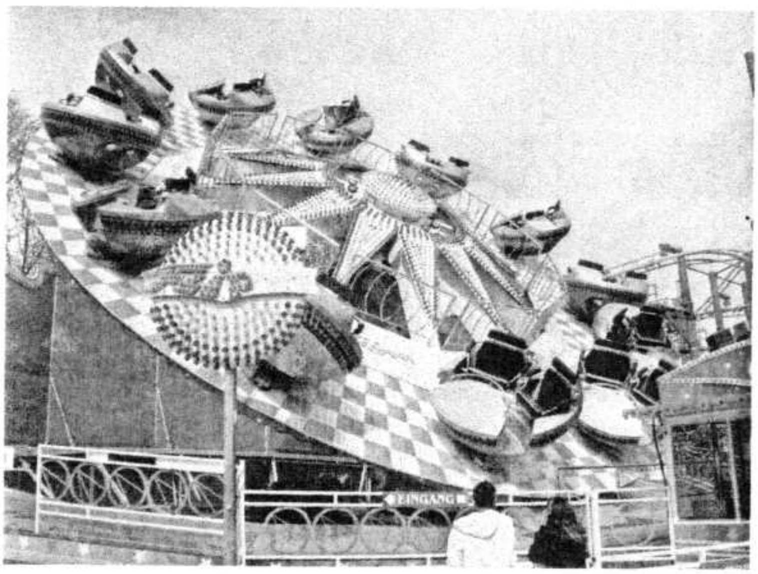
Durch einen sinnvollen Einsatz des PCs kann Geometrie nicht nur wirkungsvoll demonstriert werden, sondern es wird den Schülern ein Experimentiergerät in die Hand gegeben, mit dem entdeckend gelernt werden kann. Die oftmals unüberwindbare Hürde eines trainingsintensiven Rechenapparats muss dabei nicht überwunden werden. Analytisches Denken ist dennoch gefragt. Der Kreativität sind bei diesem Zugang kaum Grenzen gesetzt und fast immer wird das Bemühen um ein geometrisches Problem durch ästhetisch ansprechende „Antworten", wie sie in der Geometrie an der Tagesordnung sind, belohnt; und das ohne endlose Rechnungen beziehungsweise ohne nächtelanges Zeichnen.

Es wäre schön, wenn dieses „Feuer" von Leuten, die Naturwissenschaft an junge Leute weitergeben wollen, viel mehr genutzt würde. Dieser Vortrag versteht sich als eine bunt zusammen gewürfelte Ideensammlung mit dem Ziel, den ein oder anderen Geometriefächerübergriff zu skizzieren. Mit ganz wenigen Ausnahmen können die gebrachten Beispiele von Schülern – mit eventueller Hilfe durch eine Lehrperson – selbst gelöst werden.

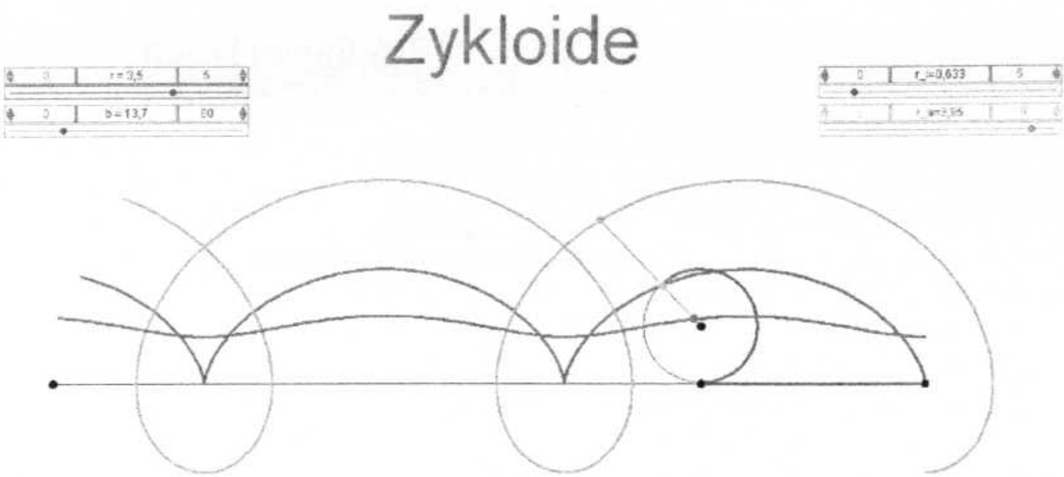
In dieser schriftlichen Zusammenfassung fehlt natürlich das Animationselement, wie es bei einem direkten Vortag natürlich zur Geltung kommt. Ebenso erschien es nicht sinnvoll, alle „technischen Details" zu verschriftlichen.

„Alles dreht sich!"



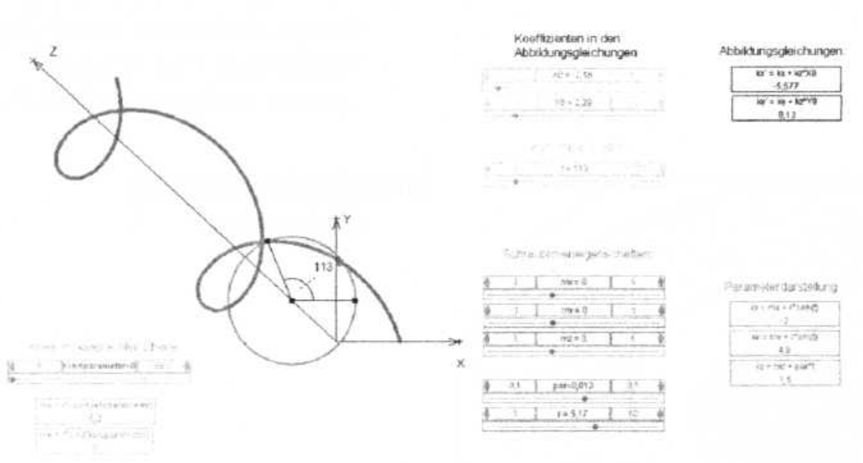


Punkte, die gleichzeitig eine Drehung und geradlinige Schiebung in einer Ebene ausführen, überstreichen eine Zykloide. Solche Kurven können leicht mit einer dynamischen Geometriesoftware erzeugt werden. Das unten gezeigte Beispiel mit der zugehörigen Animation kann bereits von Unterstufenschülern bewältigt werden.

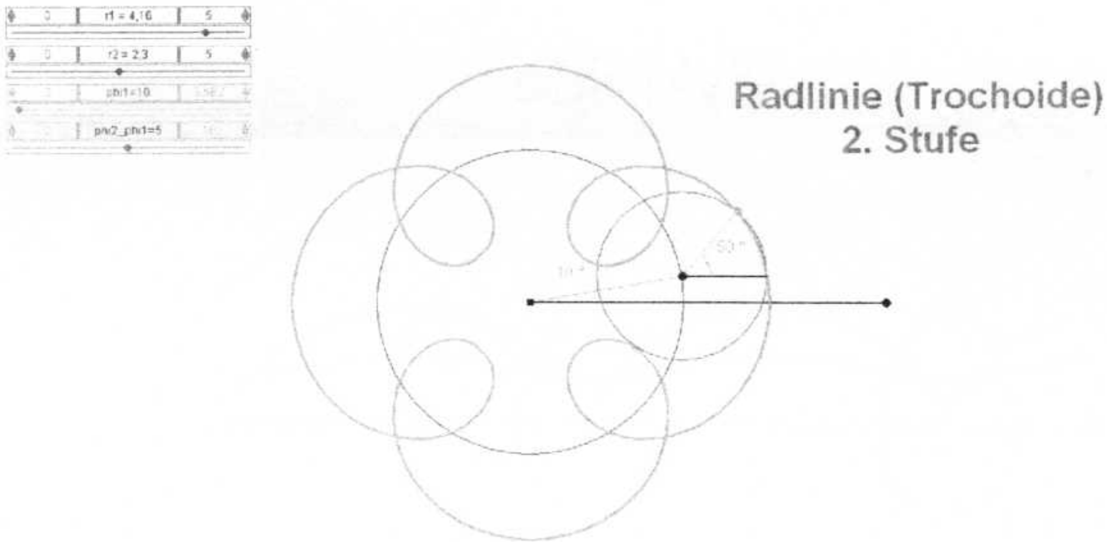


Zykloiden kann man auch beobachten, wenn Schraublinien (z.B. im Zusammenhang mit Wendeltreppen) einen Sonnenschatten auf den Boden werfen. Die folgende Zeichnung (plus Animation) ist ein nettes Geometriebeispiel für die 8. Klasse in angewandter Computergeometrie.

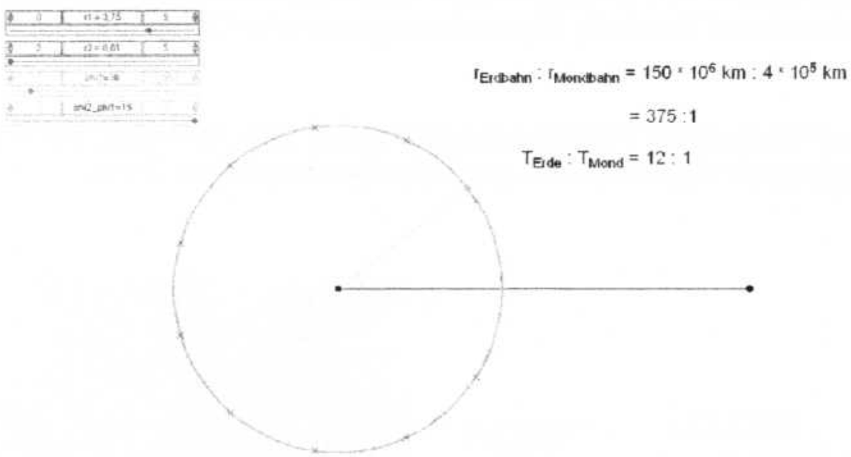
Das Foto weiter oben zeigt Schraublinien eines Vergnügungsgerätes in Wiener Prater; am Foto unten sehen wir eine „Urwaldschraublinie" aus dem Aquarium des Schönbrunner Zoos.



Werden zwei (oder mehrere) Drehungen gleichzeitig ausgeführt, so entsteht eine so genannte Trochoidenbewegung – ein weiteres Beispiel für eine Radlinie. Derartige Bewegungen werden beispielsweise in Kugellagern oder in Planetengetrieben ausgeführt. Das Foto am Anfang dieses Abschnitts zeigt ein Vergnügungsgerät des Wiener Praters, das eine Trochoidenbewegung zweiter Stufe ausführt.



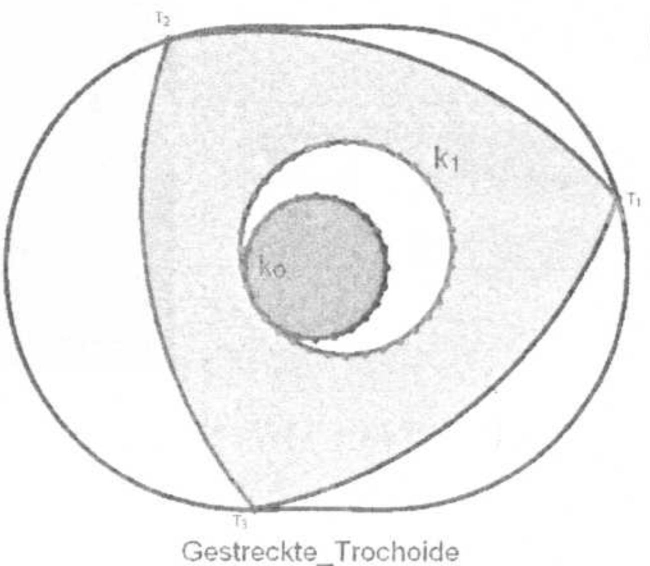
Auch Planetenmonde führen solche Trochoidenbewegungen aus. Für unseren Erdmond ist die Bahn (vom Weltall aus gesehen) mit freiem Auge kaum von einem Kreis zu unterscheiden. Schuld daran sind die extremen Radiusverhältnisse



Ein weiteres Beispiel für eine Trochoidenbewegung ist der Drehkolbenmotor.

Die Bewegung des Kolbens wird durch Abwälzen eines Innenzahnrades (k_1) auf einem Außenzahnrad (k_2) festgelegt. Die Radien stehen im Verhältnis 3:2.

Drehkolbenmotor
(Wankelmotor)

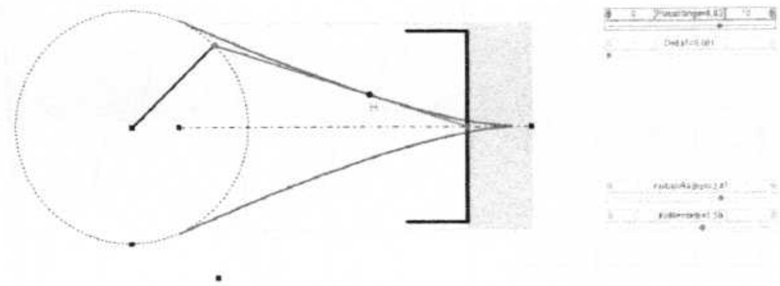


Gestreckte_Trochoide

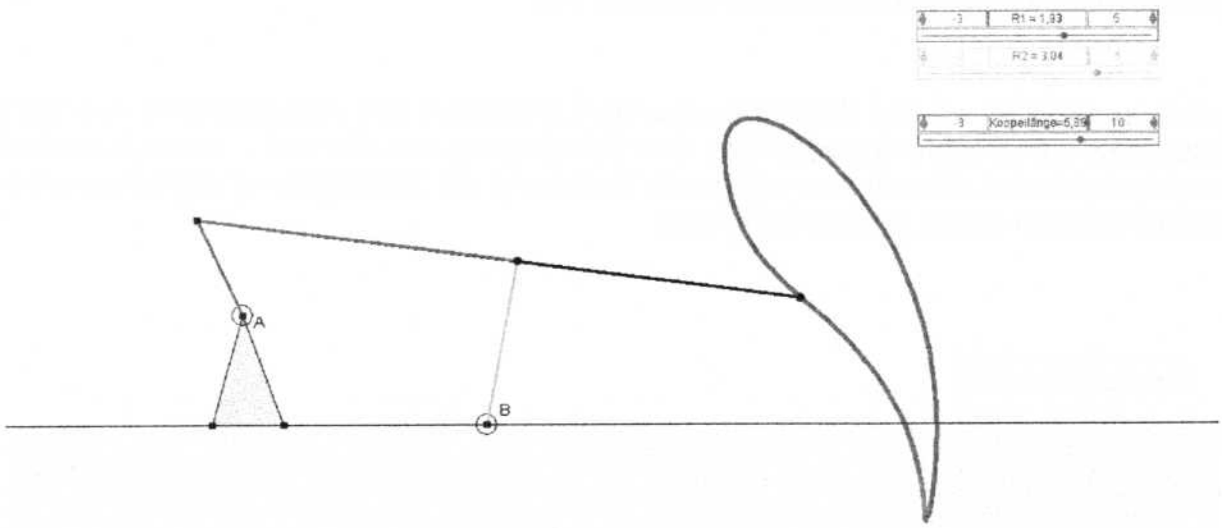
Die geniale Erfindung dabei ist, dass drei Punkte T_1, T_2 und T_3 dieselbe Bahnkurve überstreichen. Diese bildet das Gehäuse. So entstehen drei Kammern, die beim Weiterbewegen ihr Volumen verändern. Dadurch können 3 der 4 Takte, wie sie in Verbrennungskraftmaschinen nötig sind, gleichzeitig ausgeführt werden.

Pleuel - Hüllkurve

Außerdem muss nicht andauernd die Bewegungsrichtung geändert werden, wie es beim Ottomotor der Fall ist. Vom Ottomotor wird noch in einem anderen Zusammenhang die Rede sein. (Hüllkurve!)

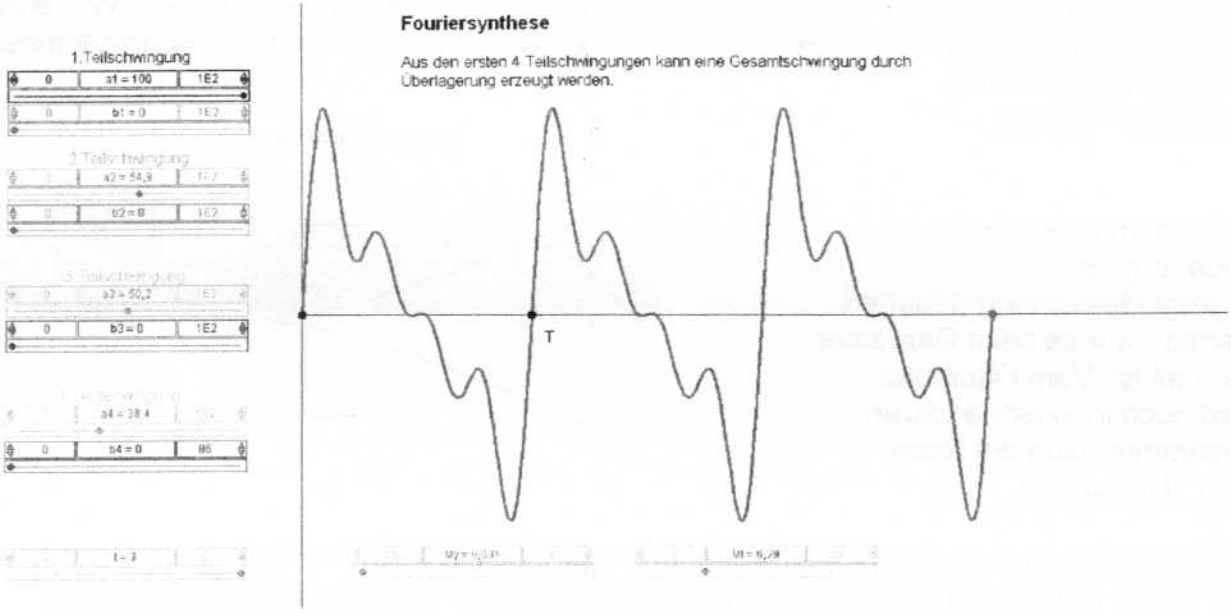


Eine Kombination von zwei Kreisbewegungen ganz anderer Art liegt bei einem Gelenksviereck vor. Diese Getriebeart wird vielseitig verwendet und zwar vom Baufahrzeug bis hin zu feinmechanischen Vorrichtungen in elektronischen Geräten. Durch Verändern der Geometrie - Lage von A und B, sowie div. Stangenlängen – kann die rosa Kurve den jeweiligen Bedürfnissen angepasst werden.



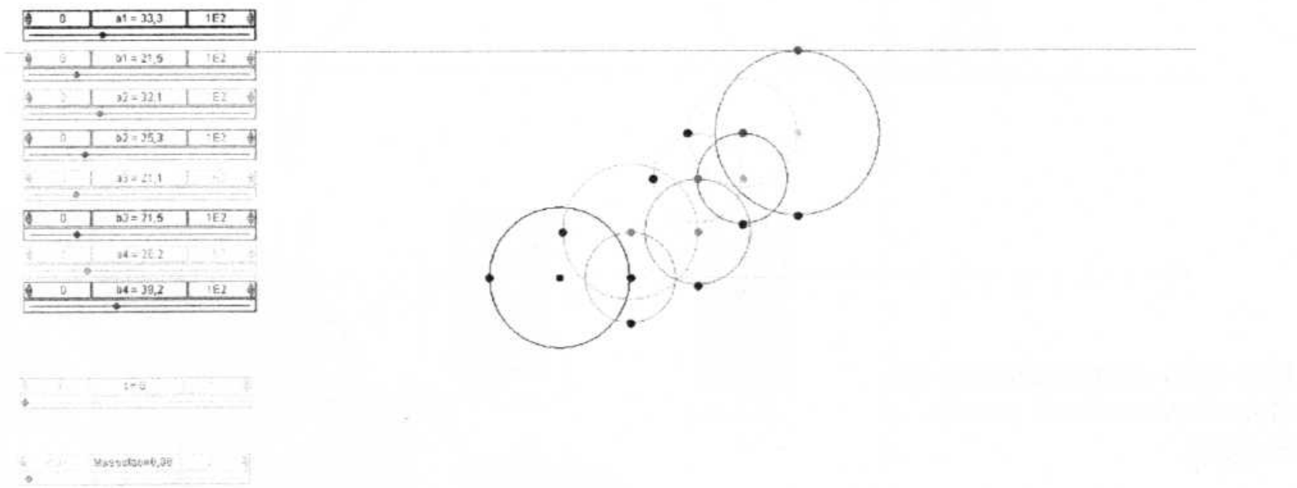
Das Foto rechts zeigt so ein Gelenksviereck an einem Bagger.

Was haben die obigen Bewegungen mit dem Klang eines elektronischen Musikinstruments zu tun?
Man sollte es nicht glauben: Eine ganze Menge!



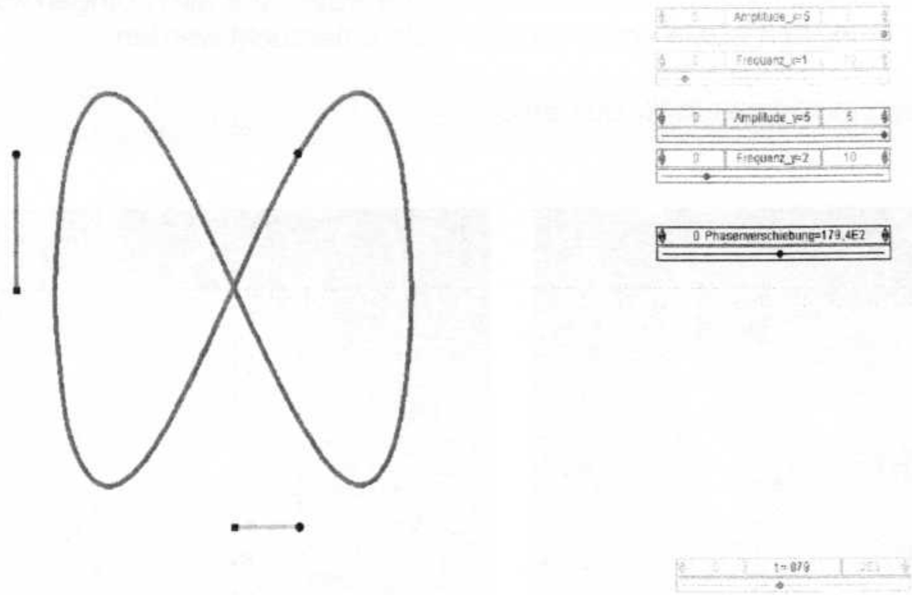
Die Klänge, die wir hören, entsprechen Schwingungen, die man sich durch seitliche Projektion von Radlinienbewegungen entstanden denken kann.

Im unserem Beispiel werden 8 Drehbewegungen überlagert. Die y-Komponente des letzten Punktes (rote waagrechte Gerade) führt eine Schwingung aus, die man – wenn man nicht geometrisch arbeitet – durch eine mühsame Rechnung als Überlagerung von Sinus- und Cosinus-schwingungungen erhält. (Fouriersynthese)

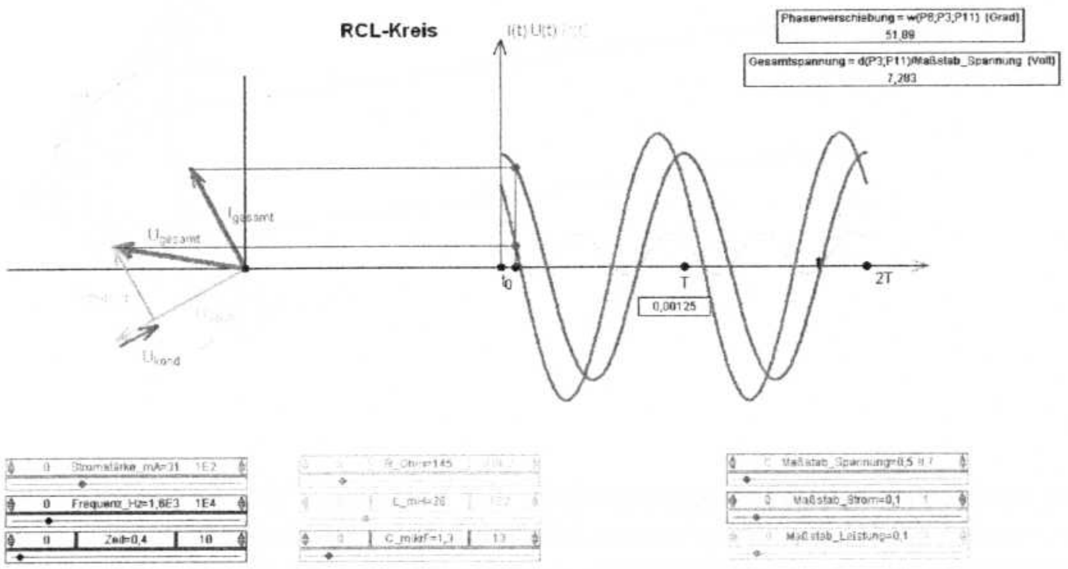


Wenn in der Disco die Verstärker elektronische Klänge herausplärren, dann ist oft eine Lasershow nicht weit.

Dabei rotieren üblicherweise mehrere Spiegel, die einen Laserstrahl ablenken; ebenfalls eine Kombination von – diesmal projizierten – Kreisbewegungen. Derartige Muster nennen wir Lissajousfiguren.



Das, was die Verstärker da wiedergeben, hat auch etwas mit Kreisbewegungen zu tun. Die elektrischen Schwingungen, wie sie beispielsweise elektronische Musikinstrumente wiedergeben, können in Schwingkreisen erzeugt werden.
Elektrische Schwingkreise kann man am besten durch ihre Zeigerdiagramme verstehen. Dabei drehen sich Strom- und Spannungszeiger und werden von der Seite projiziert.

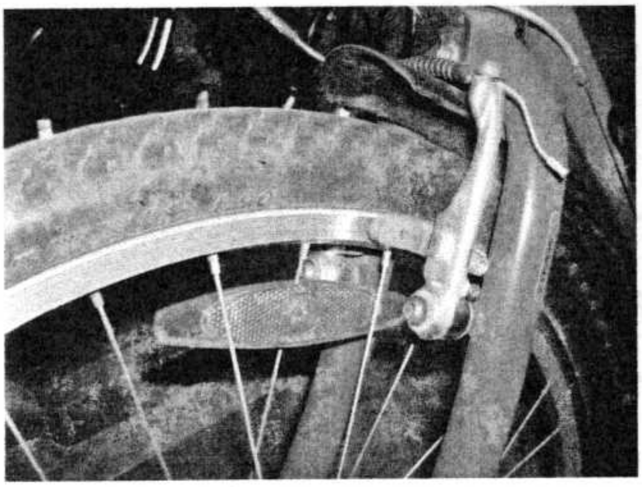


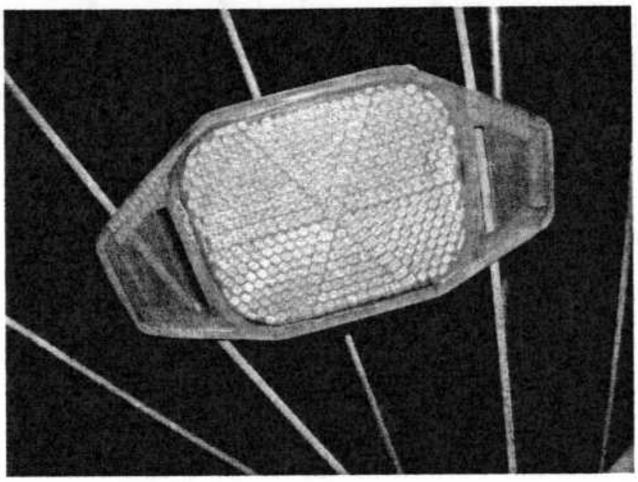
Beispiele wie dieses stehen in Physikschularbeiten der siebenten und achten Klasse an der Tagesordnung.

„Jö, schau ...!“

In der geometrischen Optik können viele Probleme sehr schön mit dynamischen Geometriepaketen veranschaulicht, erklärt und gelöst werden. Vor allen Dingen können Strahlengänge gut analysiert sowie verschiedene Fälle untersucht werden.

Wie funktioniert beispielsweise ein Rückstrahler?



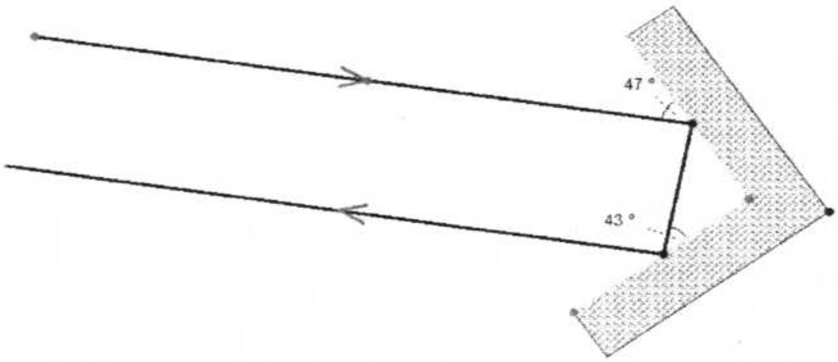


Doppelspiegel

Ein Lichtstrahl trifft hintereinander auf zwei ebene Spiegel, die einen Winkel von 90 Grad einschließen.

Aufgabe: Verändere die Lage des Spiegels und des Lichtstrahles (Blaue Punkte). Was fällt dir am zurückkommenden Lichtstrahl auf?

*Kannst du dieses Verhalten begründen? (Du kennst das Reflexionsgesetz $\alpha = \beta$. Diese Winkel sind in der Zeichnung eingetragen. Versuche eine Aussage über ihre Summe zu machen und zu begründen! ....)

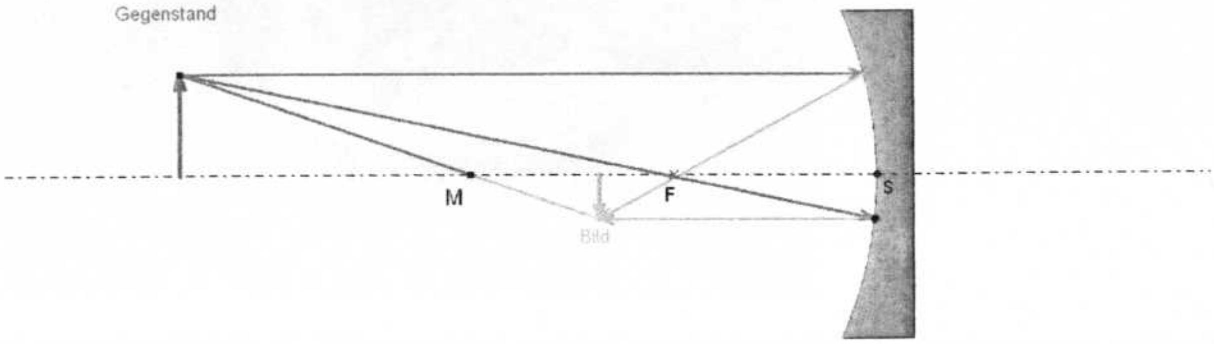


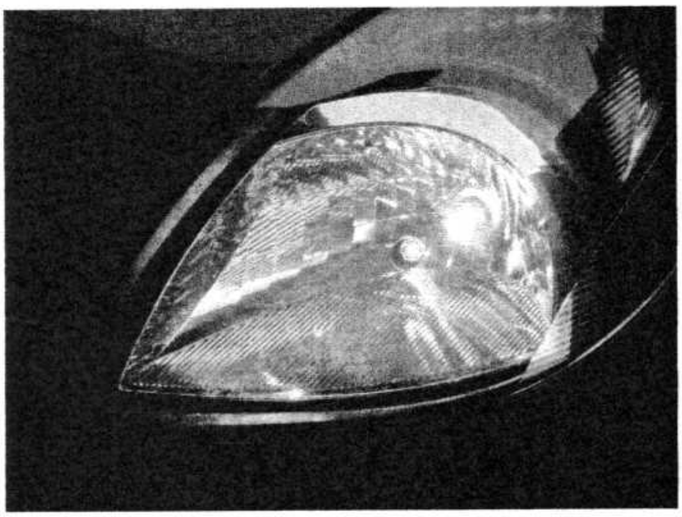
Beispiele zum Reflexionsgesetz können leicht von Schülern analysiert werden! Im obigen Beispiel wird klar, warum ein Rückstrahler das einfallende Licht – scheinbar im Widerspruch zum Reflexionsgesetz – immer in die Richtung zurück wirft, aus der das einfallende Licht gekommen ist. Tatsächlich braucht man dafür noch einen dritten Spiegel, der auf die beiden anderen normal steht. Das Funktionsprinzip wird aber schon an diesem zweidimensionalen Beispiel klar.

Die Reflexion an gekrümmten Spiegeln tritt im Alltag ebenfalls sehr oft auf. Entweder zur Bündelung von Licht (Scheinwerferreflektor) oder zum Entwerfen von Bildern bei Spiegeln im engeren Sinne.

Abbildung am Hohlspiegel

Verschiebe den Gegenstand und beobachte dabei wie sich das Bild verändert.
Fülle die Tabelle "Bildentstehung am Hohlspiegel" aus!



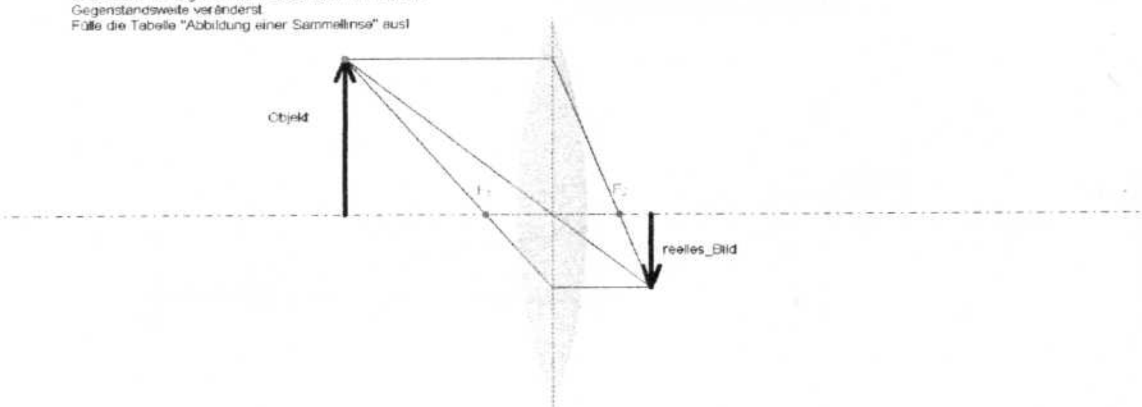


Das rechte Foto zeigt Mehrfachspiegelungen in einem Rückspiegel. In der halbdurchlässigen Scheibe spiegelt sich eine Hauswand mit Fenstern.

Neben der Reflexion spielt die Lichtbrechung in der geometrischen Optik eine wichtige Rolle.

Abbilung einer Sammellinse

Untersuche die Eigenschaften des Bildes, wenn du die Gegenstandsweite veränderst.
Fülle die Tabelle "Abbildung einer Sammellinse" aus!



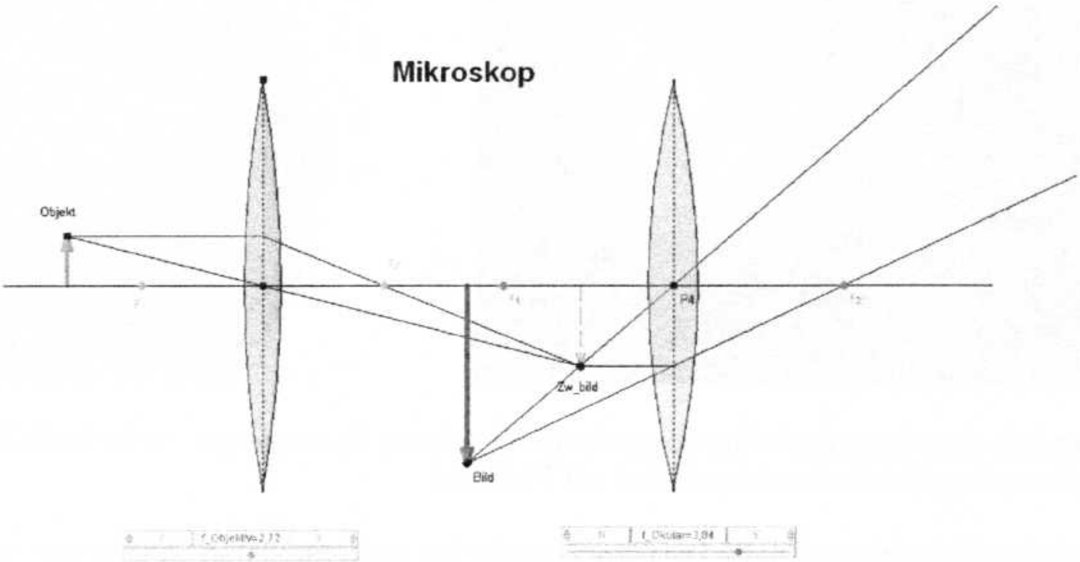
Linsen treten so gut wie überall in unserem Alltag auf. Oft muss man sie nur entdecken!

Dafür ist manchmal eine Wahrnehmungsschärfung nötig!

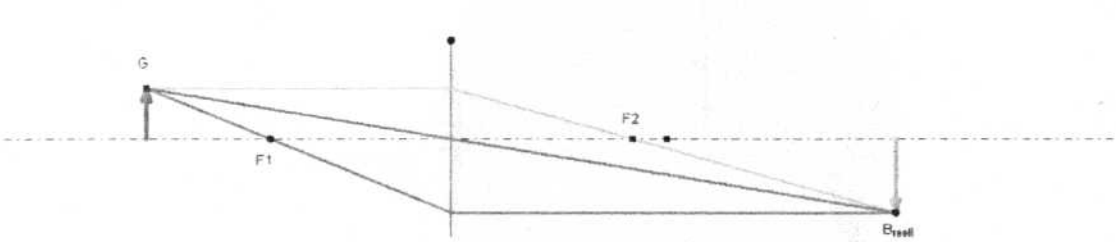
Mit den hier angegebenen Beispielen können Schüler experimentell die Abbildungsgesetze von Linsen untersuchen. Diese interaktiven Zeichnungen können durchaus von Schülern einer 3.Klasse gezeichnet werden!

Auch die Wirkungsweise von optischen Geräten (z.B. Mikroskop) wird so verständlich.

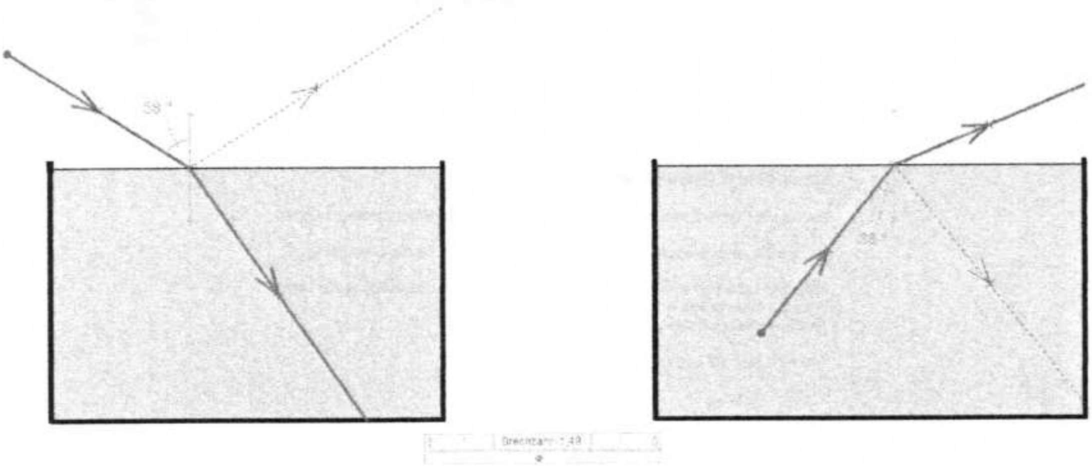
Mikroskop



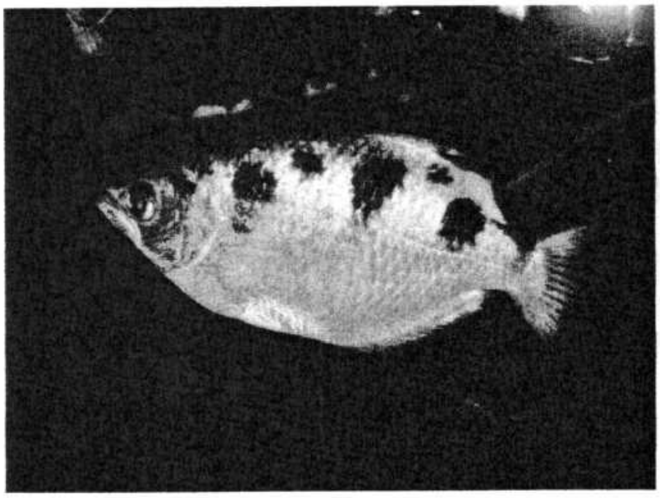
Menschliches Auge

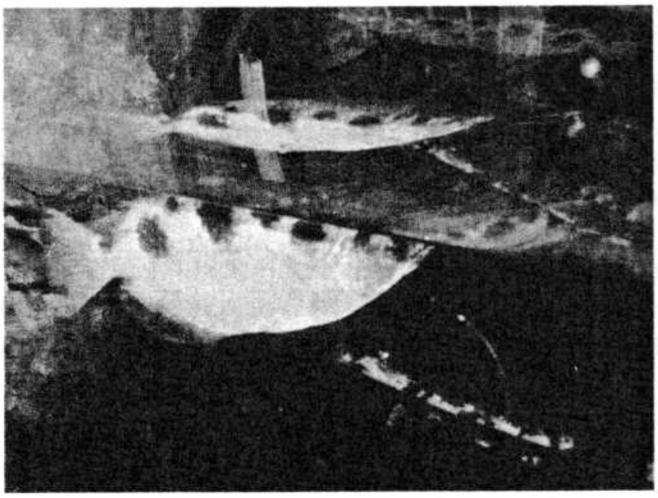


Das Brechungsgesetz von Snellius ist der Schlüssel zu den obigen Linsen. Mit der unten angegebenen Simulation können bereits Schüler der Unterstufe „experimentieren“ (Ausmaß der Brechung in Abhängigkeit vom Einfallswinkel; optische Dichten; Totalreflexion; usw.). Sobald Winkelfunktionen bekannt sind, kann diese Simulation auch von Schülern selbst geschrieben werden!



Auch der Schützenfisch hat seine naturwissenschaftliche Lektion gelernt! Er spuckt aus dem Wasser, um seine Beute (Fliegen) zu jagen. Obwohl ihn die Brechung täuschen müsste, spuckt er in die richtige Richtung!





„Jö, schau doch mal genauer ...!“

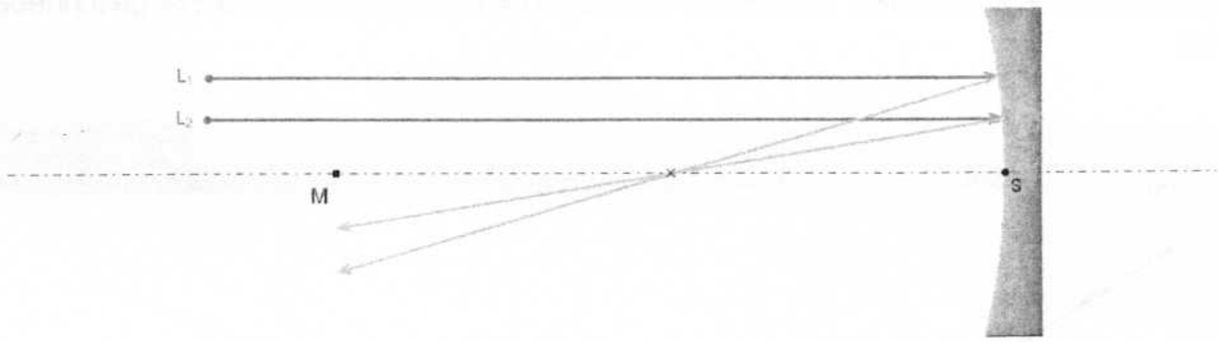
Brennpunkte zu verwenden ist eine Sache. Die Tatsache, dass es sie so eigentlich gar nicht gibt, ist eine andere. Die beiden nachstehenden Beispiele zeigen, dass die Brennpunkteigenschaft nur für Grenzfälle existiert.

Brennpunkt beim Hohlspiegel

Verändere die Lage der einfallenden, achsenparallelen Strahlen. Wo befindet sich ihr Schnittpunkt F?

Wie weit ist dieser Schnittpunkt F von S (Spiegelscheitel) - im Vergleich zur Entfernung zwischen M und S - entfernt?

Verändere nun die Lage von M! Wann nur gilt die obige Behauptung?



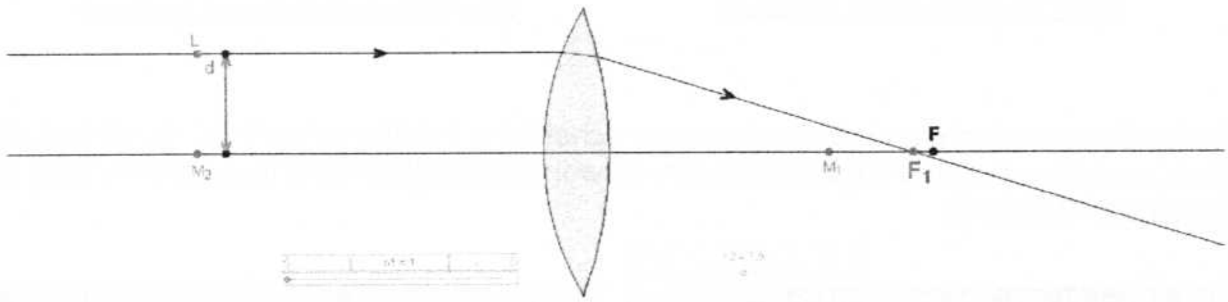
Linsenfehler (Randstrahlen)

Die blauen Punkte können verändert werden; ebenso die Brechzahlen n1 und n2.

M1 und M2 sind die Krümmungsmittelpunkte der Linse. F ist der Brennpunkt.

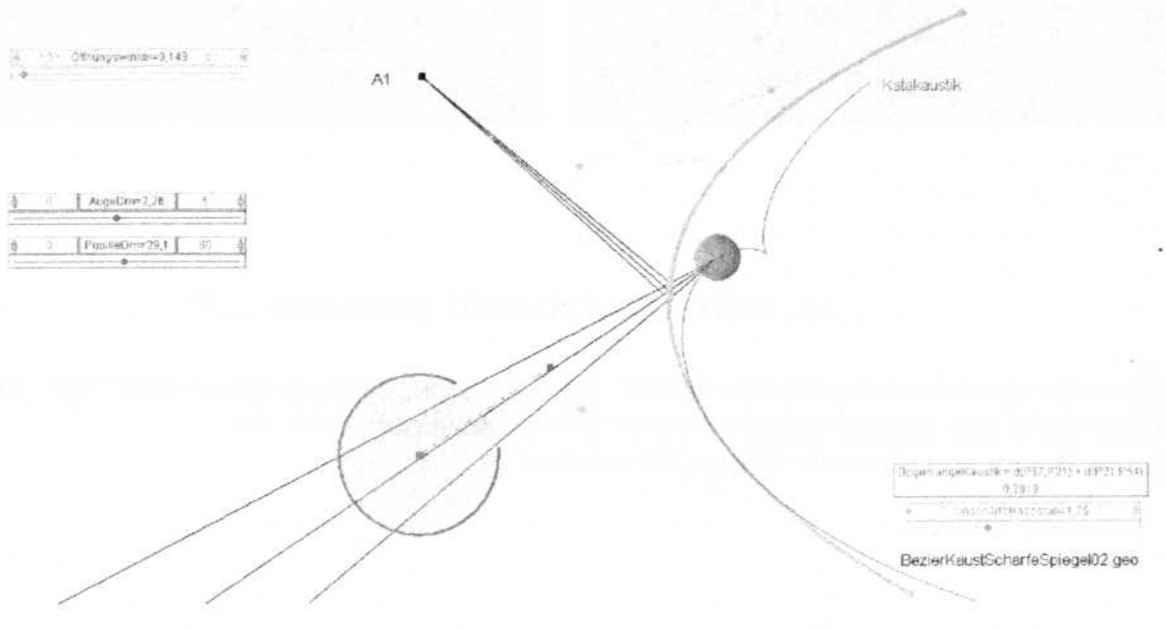
Aufgabe: Untersuche, welche achsenparallelen Strahlen tatsächlich durch den Brennpunkt verlaufen, oder zumindest annähernd.
Welche Rolle spielt dabei **d**?

Wie wirkt sich die Lage von M_1 und M_2 aus?

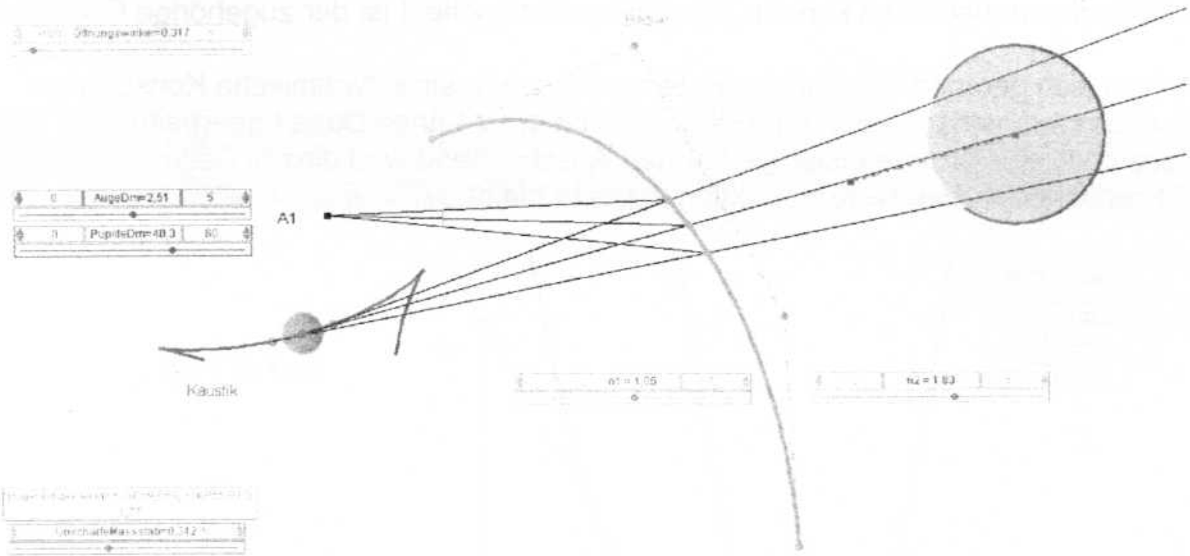


Tatsächlich ist es ja so, dass die reflektierten beziehungsweise gebrochenen Stahlen nicht wieder durch einen gemeinsamen Punkt – den Brennpunkt – verlaufen. Vielmehr bilden sie eine nicht kopunktale Geradenschar. Jene Kurve, die von allen reflektierten bzw. gebrochenen Strahlen berührt wird, nennt man Katakaustik bzw. Kaustik.

Lichtstrahlen, die von einem Punkt A1 ausgehen, werden an einem Spiegel (grün) reflektiert und gelangen in das Auge des Betrachters (blau). Die reflektierten Strahlen (bzw. deren Verlängerungen) schneiden sich nicht in einem gemeinsamen Punkt.



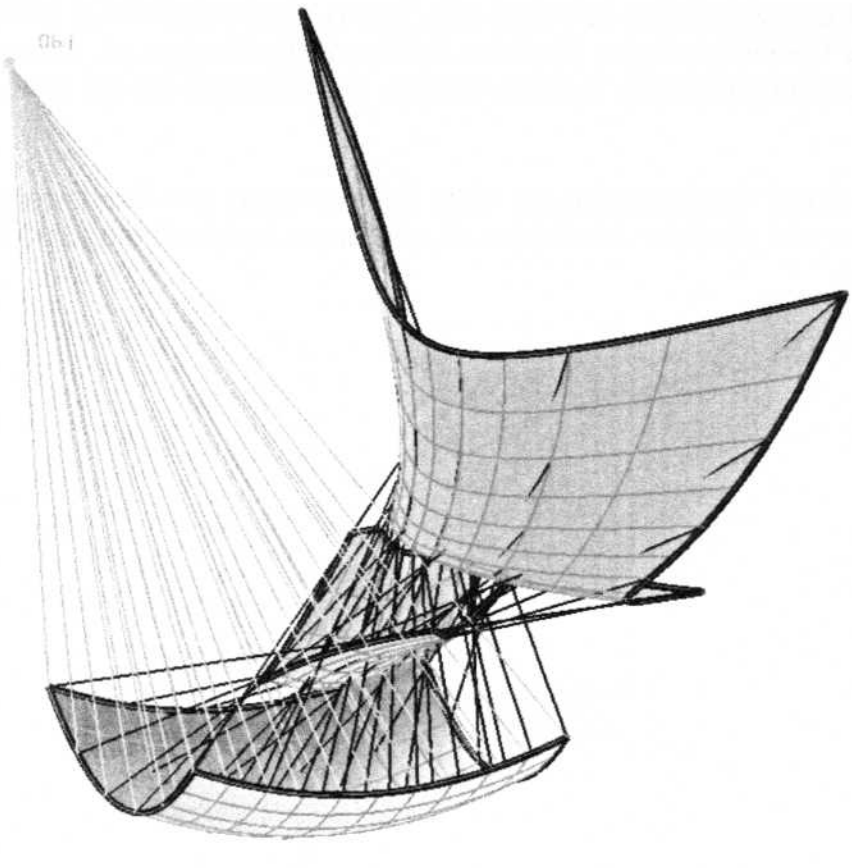
Von einem Punkt A1 ausgehende Strahlen werden an einer Grenzfläche (grün) zweier Medien gebrochen. Die gebrochenen Strahlen (bzw. deren Verlängerungen) verlaufen nicht durch einen gemeinsamen Punkt!



BezierKaustSchärfeBrech01.geo

In den beiden Zeichnungen zeigen die rosa eingezeichneten Kreise an, wie stark die Brennpunkteigenschaft „verletzt“ ist.

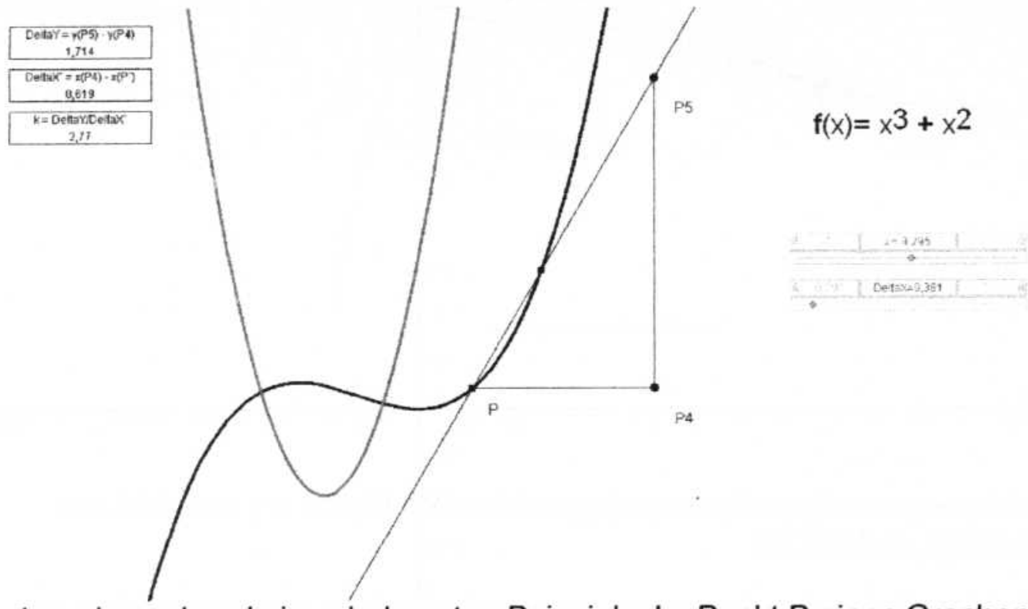
Dreidimensional betrachtet ist die Sache noch etwas komplizierter. Hier tritt anstelle der Katakaustikkurve ein Paar von Flächen, die beiden Brennflächen. Eine derartige Untersuchung in der Schule wäre sicherlich zu hoch gegriffen.



Im Folgenden möchte ich daher zeigen, wie ich das Thema „Hüllkurven“ – dazu gehören ja z.B. Kaustik und Katakaustik – in den 7. und 8. Klassen unterbringe.

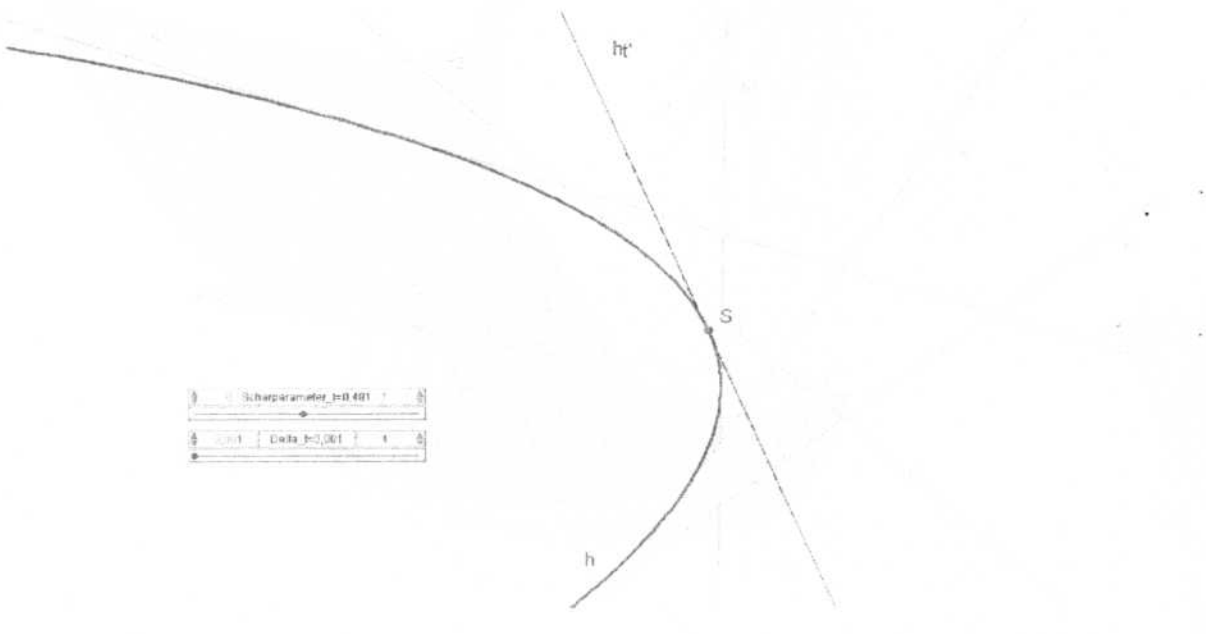
Zunächst eine Vorbemerkung zu ein paar Grundbegriffen: In der 7. Klasse lernt man ja den Begriff des Differenzenquotienten kennen. Der Differentialquotient ist der zugehörige Grenzwert.

Das lässt sich geometrisch gut auswerten, indem man eine dynamische Konstruktion differenzengeometrisch ausführt. Dabei wird mit einer Länge Delta t gearbeitet (z.B. Radius eines Kreises oder eine andere beliebige Länge). Anschließend wird dieses Delta t numerisch auf z.B. 0,001 reduziert, wobei die Konstruktion aufrecht bleibt.



Wir machen das anhand eines bekannten Beispiels. Im Punkt P eines Graphen einer Funktion f(x) (schwarz) wird durch einen Punkt P eine Sekante gezeichnet. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte dieser Sekante mit dem Graphen haben wir als „Delta-x“ gewählt. Wir zeichnen nun ein Steigungsdreieck dieser Sekante und bestimmen die Steigung. (Differenzenquotient zu P und P1). Anschließend verringern wir Delta-x auf 0,001. Dabei nimmt der Differenzenquotient mit ausreichender Genauigkeit den Wert des Differentialquotienten an. Diesen Wert können wir dann als Ordinate an der jeweiligen Stelle auftragen. Damit haben wir die erste Ableitung (rot) zu f(x) gezeichnet.

Mir gefällt an dieser Vorgehensweise, dass Schüler dabei den Grenzwert durch Betätigen des Schiebereglers von „Delta-x“ tatsächlich durchführen und die (stetigen) Veränderungen direkt sehen können.



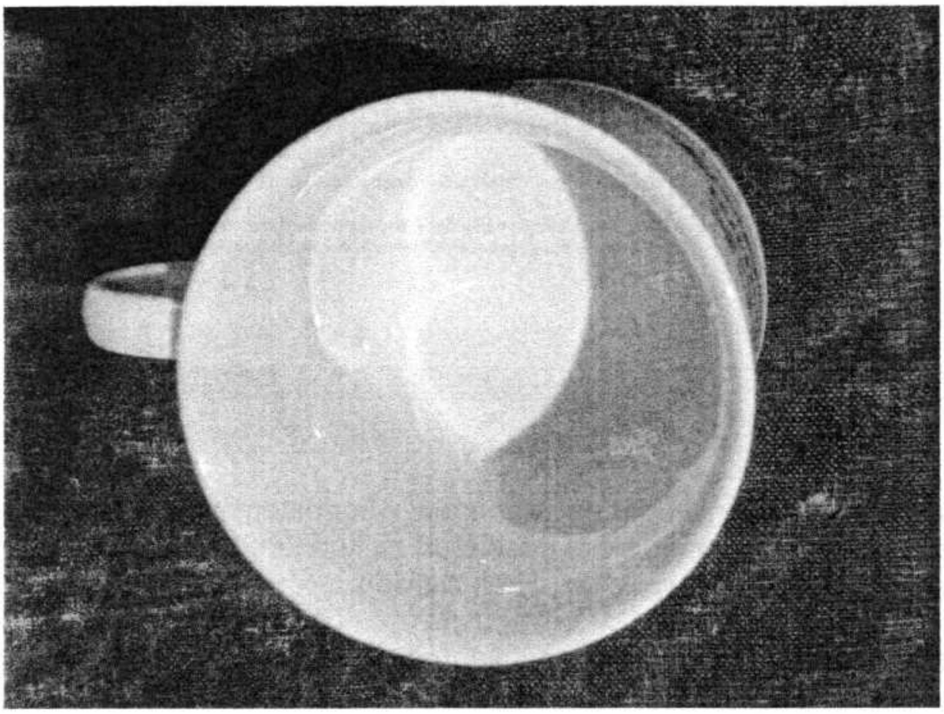
Dieses Verfahren können wir in ähnlicher Weise benützen, um Hüllpunkte von Kurvenscharen zu ermitteln.

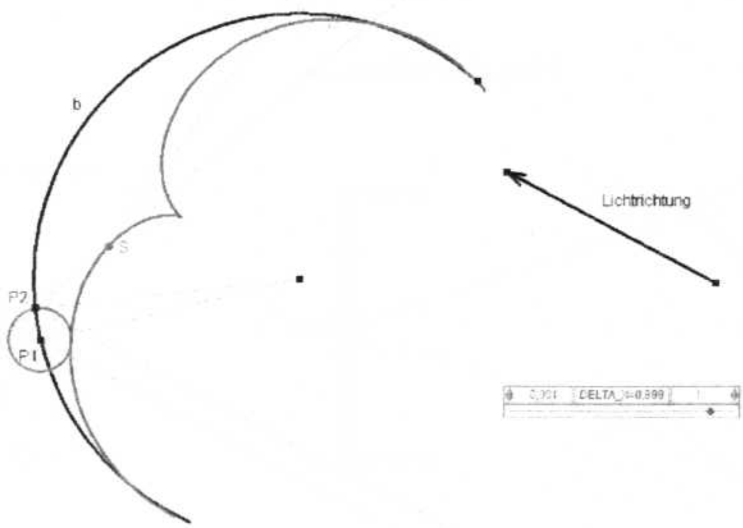
Wir haben eine Menge von Geraden h(t). Dabei ist t der so genannte Scharparameter. Wir schneiden zwei „benachbarte" Geraden $h(t_1)$ und $h(t_1+\text{Delta } t)$. Wir nennen diesen Schnittpunkt S. Wenn wir anschließend Delta t sehr klein machen, dann konvergiert S gegen den Hüllpunkt H. In der uns vertrauten Schreibweise:

$$H = \lim_{\Delta t \to 0} S$$

Somit sind wir in der Lage Hüllpunkte und die zugehörigen Hüllkurven zu konstruieren.

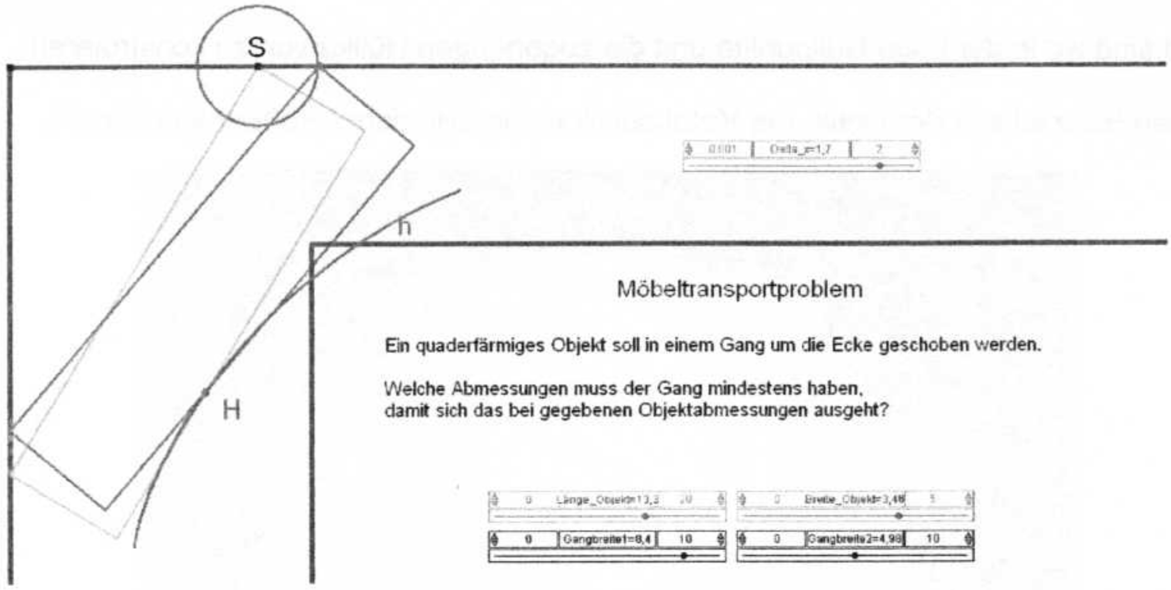
Hier ein Beispiel aus der Optik: Die Katakaustik eines Zylinders („Kaffeehäferlkurve").





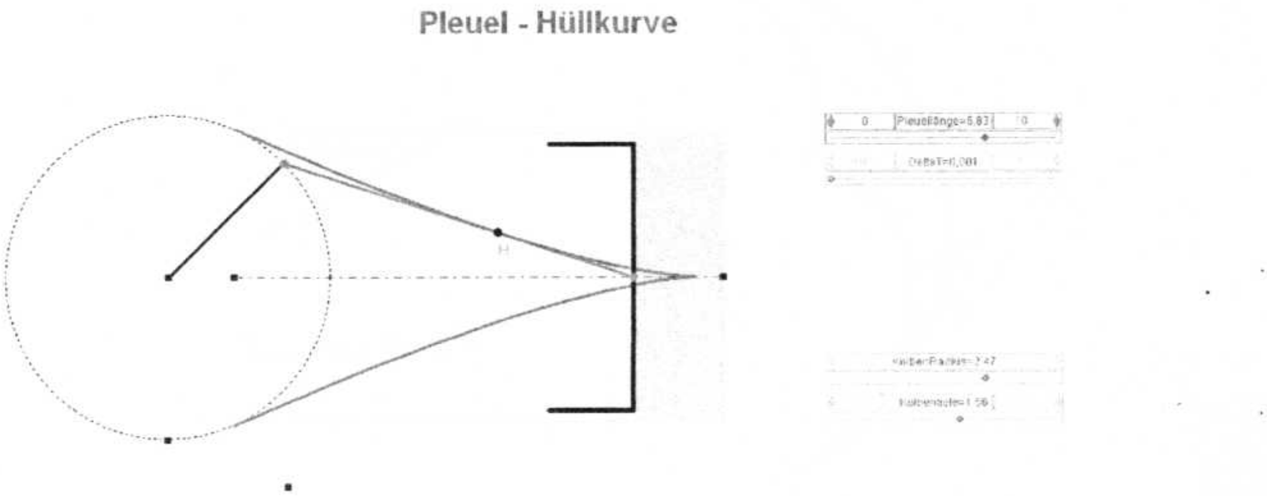
Parallel einfallendes Licht wird an der Innenseite eines Kaffeehäferls reflektiert. Wir konstruieren gemäß dem Reflexionsgesetz $\alpha = \beta$ zu zwei Strahlen (grün und orange) die Reflexionen. Die beiden Auftreffpunkte P1 und P2 haben dabei einen Abstand Delta_X (blauer Kreis). Der Schnittpunkt S der beiden reflektierten Strahlen wird – wenn Delta_X gegen Null strebt – zum Hüllpunkt. Die Hüllkurve (rot) ist die Ortslinie von H, wenn P1 variiert wird.

Der gleiche geometrische „Trick" liegt den beiden folgenden Beispielen zu Grunde, obwohl sie mit Optik gar nichts zu tun haben!



In dem obigen Beispiel müsste entweder ein Mauereck weggestemmt oder vom Kasten ein Stückchen weggefräst werden, um die Ecke passieren zu können. Durch Einstellen der Regler können die entsprechenden „Grenzwerte" ermittelt werden.

Für den Ottomotor, von dem ja schon die Rede war, gibt die Hüllkurve der Pleuelstange deren Platzbedarf an.



Ganz ähnlich lassen sich Kaustikkurven für die Lichtbrechung konstruieren. Eigentlich analysiert unser Auge beim Sehen andauernd solche Kaustiken (genauer Kaustikflächen).

Mit Hilfe differenzengeometrischer Konstruktionen können ganz viele naturwissenschaftliche Ideen, wie sie in der Schule unterrichtetet werden, veranschaulicht und analysiert werden. Natürlich soll dennoch das exakte Rechnen mit Ableitungen etc. seinen Platz haben.

Zusammenfassung:

Der soeben gezeigte Ansatz – Problemen „derart geometrisch zu Leibe zu rücken“ - hat zwei besondere Vorteile. Zum einen können Probleme in Angriff genommen werden, die – wenn man das AHS-Niveau berücksichtigt – für Schüler bislang unzugänglich waren. Außerdem wirkt diese Methode dem schematisierenden „gedankenlosen“ Rechnen entgegen.

Ebenso meine ich, dass Geometrie in ihrer Anschaulichkeit oftmals eine Tür zu tieferem Verständnis öffnet, wo abstraktere Herangehensweisen nicht so geeignet sind.

Es hat schon seinen Grund, warum Mathematiker, Physiker und andere Wissenschaftler - wann immer möglich – versuchen, sich mit Hilfe einer Skizze Klarheit zu verschaffen; sei es mit einer Figur oder einem Diagramm. Ebenso sind Icons am Desktop für den Benutzer angenehmer und übersichtlicher als riesig lange Namenslisten.

Unser Wahrnehmungsapparat, der ja ein wichtiger Faktor für das Erlangen von Einsichten ist, ist nun einmal stark geometrisch „programmiert“! Daher ist es naheliegend, diese Schiene für das Vermitteln von Inhalten ausgiebig zu nutzen.